



7175.24







OSSERVAZIONI

SULLE FORMULE DEL MOTO VERTICALE DEI GRAVI

E SOLUZIONI CONSEGUENTI

*del problema dato come prova di fisica
per la licenza liceale nella sessione del luglio 1886.*

La formula $s = ut - \frac{1}{2} g t^2 \dots$ (I) non solo esprime per s lo spazio percorso in salita nel tempo t da un corpo lanciato verticalmente in alto con la velocità iniziale u , ma, più generalmente, rappresenta per s , in grandezza e segno, la distanza dal punto di partenza alla posizione in che arriva il grave in un tempo t qualunque, contato dall'istante di proiezione, anche maggiore del tempo impiegato a raggiungere la massima altezza, anche più grande di quello dopo cui fa ritorno al punto di partenza. E ciò in virtù del principio della composizione de' movimenti, secondo il quale principio un punto materiale, soggetto a più cause di moto quali si voglia-no, trovasi, dopo un tempo qualunque, nella posizione in cui sarebbe giunto se queste cause di moto avessero agito l'una dopo l'altra, ciascuna durante quel tempo. Secondo la formula (I) così generalizzata, l'altezza s raggiunta è zero per $t = 0$ e per $t = \frac{2u}{g}$ (radici dell'equazione $ut - \frac{1}{2} g t^2 = 0$);

è massima per $t = \frac{u}{g}$, e questa massima altezza è $\frac{u^2}{2g}$ ⁽¹⁾

Similmente la formula $v = u - gt$ (II)
non solo rappresenta per v la velocità che, durante la salita, rimane, dopo il tempo t dalla partenza, al corpo lanciato verticalmente in alto con la velocità u , ma dà per v , in grandezza e segno, la velocità del mobile dopo un tempo t qualunque dalla partenza, anche maggiore del tempo $\frac{u}{g}$ impiegato nell' ascesa, anche più grande di quello $\frac{2u}{g}$ che passa fra l'istante di proiezione e il momento in cui raggiunge di nuovo il punto di partenza. ⁽²⁾ Secondo la (II)

(1) Infatti, posto $t = \frac{u}{g} \pm \alpha$, si ha

$s = \frac{u^2}{2g} - \frac{1}{2} g \alpha^2$, onde si vede che s è massima

per $\alpha = 0$, ossia per $t = \frac{u}{g}$, e che questa massi-

ma altezza è $\frac{u^2}{2g}$.

(2) La generalizzazione della (II) si potrebbe ottenere così:
per tutta la salita si ha $v = u - gt$; dopo il tempo $t > \frac{u}{g}$,
contato dall'istante della proiezione, il mobile discende da un
tempo $t - \frac{u}{g}$ e quindi la sua velocità in valore assoluto è:

$$g \left(t - \frac{u}{g} \right) = gt - u.$$

Siccome poi questa velocità è di senso contrario alla velocità di proiezione u , e deve essere quindi di segno contrario ad u , così dovrà rappresentarsi in grandezza e segno con $-(gt - u) = u - gt$.

Dunque tanto nella salita che per la discesa si ha $v = u - gt$.
Del resto la (II) si può ottenere dalla (I), applicando la de-

generalizzata v è zero per $t = -\frac{u}{g}$, negativo (cioè di segno contrario ad u) e crescente indefinitamente in valore assoluto per $t > -\frac{u}{g}$.

Eliminando t fra le due equazioni (I), (II) si ottiene:

$$v = \pm \sqrt{u^2 - 2gs} \quad \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Ad uno stesso valore di s corrispondono dunque due valori di v uguali e di segno contrario, sempre reali perchè il massimo valore di s è $\frac{u^2}{2g}$; e ciò ne indica che un corpo, lanciato verticalmente in alto, possiede in uno stesso punto qualunque della traiettoria, velocità uguali e di senso contrario. Naturalmente una di queste velocità compete al passaggio per il punto nella salita, l'altra al passaggio per il punto medesimo nella discesa. ⁽¹⁾

Risolvendo la (I) rispetto a t si ha:

$$t = -\frac{u}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{u^2 - 2gs} \quad \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

I due valori di t , reali sempre, ed entrambi positivi per s positivo, cioè per altezze superiori al punto di partenza, esprimono i due tempi, sempre contati dall'istante della proiezione, dopo i quali il grave si trova ad una data

finizione che: nel moto vario la velocità in un istante qualunque è il limite del rapporto fra lo spazio percorso a partire da questo istante ed il tempo impiegato a percorrerlo, quando questo tempo diminuisce indefinitamente.

(¹) per s negativo, cioè per un punto di arrivo inferiore a quello di partenza, il valore negativo di v , maggiore in valore assoluto di u , risponde al caso che si contempla del grave lanciato verticalmente di basso in alto; il valor positivo di v corrisponderebbe al caso in cui il corpo fosse invece lanciato, con la medesima velocità u , verticalmente di alto in basso.

altezza s sul punto da cui è lanciato. Il valore più piccolo, quello che avanti al radicale ha il segno $-$, esprimerà il tempo impiegato a salire sino al punto alto s sul punto di partenza; l'altro rappresenterà il tempo che scorre dall'istante di proiezione al momento in che il mobile ripassa discendendo per la posizione situata all'altezza s sul punto di partenza ⁽¹⁾

La somma $\frac{2u}{g}$ di questi due valori di t è costante ed è uguale al tempo complessivo impiegato a raggiungere la massima altezza e a ritornare al punto di partenza; la loro differenza $\frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gs}$ è invece variabile con s , ed è nulla per $s = \frac{u^2}{2g}$, cioè per l'altezza massima raggiunta, uguale a $\frac{2u}{g}$ per $s = 0$, cioè per il punto di partenza.

Ciò premesso, veniamo alle soluzioni del problema, che è questo: « Due mobili sono lanciati verticalmente dal basso in alto, con la velocità iniziale di 20 m., a 3 secondi di intervallo l'uno dall'altro: a quale distanza dal punto di partenza si incontreranno? »

Per generalità denoteremo con u la velocità uguale con

(¹) Per s negativo i due valori di t sono di segno contrario. Solamente il positivo, quello che innanzi al radicale ha il $+$, risponde in tal caso alla quistione ed esprime il tempo impiegato nella salita sino al sommo dell'altezza e nella discesa sino al punto inferiore di s al punto di partenza. L'altro valore di t esprimerebbe, in valore assoluto, il tempo impiegato a percorrere lo spazio s da un corpo che fosse lanciato con la velocità u verticalmente di *alto in basso*, come si può riconoscere osservando che questo valore assoluto di t è inferiore di $\frac{2u}{g}$ al primo.

che i due mobili sono lanciati e con τ l'intervallo di tempo che separa gli istanti di proiezione. Chiameremo poi t il tempo dopo il quale i due corpi si incontrano, contato dalla partenza del primo lanciato; così che questo, al momento dell'incontro, si sarà mosso per il tempo t , l'altro per il tempo $t - \tau$.

1.^a soluzione. Quando i due mobili si incontrano trovansi alla medesima distanza dal punto di partenza; deve quindi essere, secondo la (I) generalizzata:

$$ut - \frac{1}{2} g t^2 = u (t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2,$$

la quale equazione, di 1.^o grado in t , dà: $t = \frac{u}{g} + \frac{\tau}{2}$,

Il valore del primo, o del secondo membro di detta equazione, per questo valore di t , è il valore della distanza del punto ove succede l'incontro da quello di partenza:

questa distanza è quindi: $\frac{u^2}{2g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2} \right)^2$.

Questi risultati si possono enunciare così: il tempo dopo cui succede l'incontro, contato dalla partenza del mobile lanciato per il primo, è uguale al tempo impiegato da questo a raggiungere la massima altezza, più la metà dell'intervallo che separa gl'istanti di proiezione; la distanza del punto ove ha luogo lo scontro dal punto di partenza è uguale all'altezza dovuta alla velocità di proiezione diminuita dello spazio di che discende, senza velocità iniziale, un grave nella metà dell'intervallo che separa gli istanti di proiezione.

La distanza del punto d'incontro dei due mobili dal sommo dell'altezza raggiunta da quello partito per primo è quindi $-\frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2} \right)^2$, cioè indipendente dalla velocità di proiezione ed uguale allo spazio che un corpo, abbandonato senza velocità iniziale all'azione della gravità, percor-

re nella metà del tempo che passa fra gli istanti di proiezione dei due mobili.

2.^a soluzione. Quando i due mobili si incontrano hanno velocità uguali e di senso contrario, poichè, in tal momento, il primo lanciato possiede velocità uguale e di senso contrario a quella che aveva allorchè salendo è passato per il punto d' incontro, e l'altro, partendo con la stessa velocità iniziale, possiede velocità uguale in grandezza e senso a quella che aveva il primo passando nella salita per il punto d' incontro. Ora le velocità dei due corpi al momento dell' incontro sono, secondo la (II) generalizzata, rappresentate in grandezza e segno rispettivamente da $u - g t$, $u - g (t - \tau)$; uguagliando queste velocità, dopo aver cambiato segno ad una di esse, abbiamo quindi:

$$-(u - g t) = u - g (t - \tau),$$

la quale dà $t = \frac{u}{g} + \frac{\tau}{2}$.

I due mobili si incontrano dunque dopo il tempo $\frac{\tau}{2}$ dall' istante in cui quello che parte per il primo raggiunge la massima altezza. Quindi, siccome questo discende con moto naturalmente accelerato, la distanza del punto d' incontro dei due mobili dal sommo dell' altezza raggiunta dal primo è $\frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ e dal punto di partenza:

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2}\right)^2.$$

Sostituendo il valore trovato di t nelle espressioni delle velocità dei due corpi al momento dell' incontro, si hanno i valori di queste velocità, che risultano, per il mobile lanciato pel primo $- g \frac{\tau}{2}$, per l'altro $+ g \frac{\tau}{2}$. Si noti che queste velocità sono indipendenti dalla velocità di proiezione u .

3.^a soluzione. Chiamata s la distanza fra il punto d'incontro e il punto di partenza, il tempo t è quello che un grave, lanciato verticalmente in alto con la velocità u , impiega per raggiungere la massima altezza e per discendere da questa sino al punto alto della quantità s sul punto di partenza, e il tempo $t - \tau$ è quello che mette un grave, lanciato verticalmente in alto con la stessa velocità, a elevarsi dell'altezza s sul punto di partenza. Secondo i valori (IV) deve quindi aversi:

$$t = \frac{u}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{u^2 - 2 g s}$$

$$t - \tau = \frac{u}{g} - \frac{1}{g} \sqrt{u^2 - 2 g s}$$

onde, eliminando t e risolvendo poscia rispetto ad s , si ha

$s = \frac{u^2}{2g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2} \right)^2$ per la distanza fra il punto di partenza e quello dove succede l'incontro.

Sostituendo questo valore di s nell'una, o nell'altra delle equazioni si ha per t il valore $\frac{u}{g} + \frac{\tau}{2}$, che si può anche ottenere direttamente dalle equazioni stesse sommandole.

Le velocità dei due mobili al momento dell'incontro si possono anche ottenere sostituendo il valore trovato dell'altezza s a cui si incontrano nella (III); e così si hanno per queste velocità i valori $\pm g \frac{\tau}{2}$, già trovati altrimenti.

Si omettono le altre facili soluzioni del problema, non fondate sulle cose premesse.

Ferrara, 28 luglio 1886.

GIUSEPPE BONGIOVANNI

806,747



